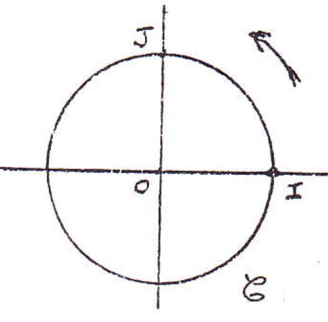
Les angles (de couples de vecteurs non nuls)

Dans tout ce qui suit le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un point origine O. Les vecteurs utilisés sont tous non nuls.

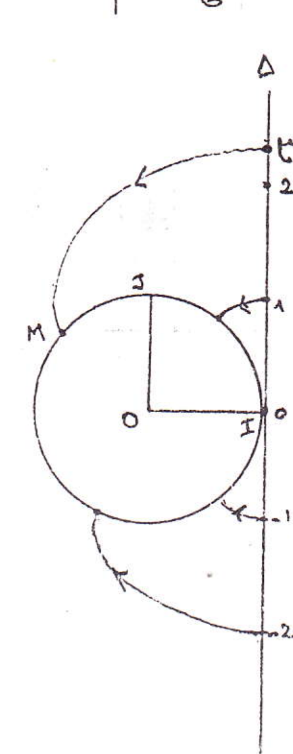
I) Mesures des angles

1) Cercle trigonométrique



Le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1, orienté dans le sens direct et muni d'un point origine I est appelé cercle trigonométrique.

2) Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique



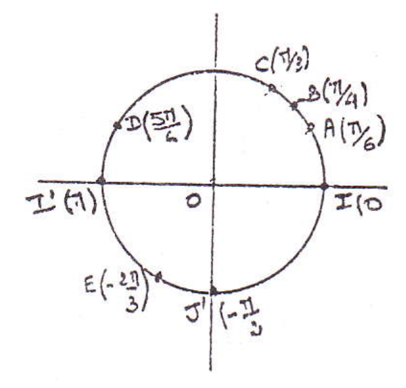
Le fait "d'enrouler une droite graduée Δ" sur le cercle $\mathcal{C}$ permet d'associer à tout réel t un point M et un seul du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

• Ainsi, tout point M de $\mathcal{C}$ est associé à une infinité de nombres réels appelés abscisses curvilignes de M.
Si t est une abscisse curviligne de M les autres sont de la forme $t + 2k\pi$ où k est un entier relatif.

• Pour exprimer que les réels x et y diffèrent d'un multiple entier de 2π, on écrit : "$y = x \quad [2\pi]$" qui se lit : "y égale x modulo 2π"

Dans la figure ci-après, la notation $A(\pi/6)$ signifie que $\pi/6$ est une abscisse curviligne de A.

3) Mesures d'un angle

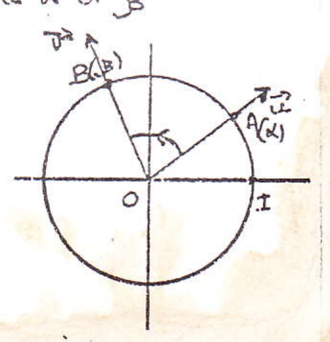


• Soit deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$, α et β deux abscisses curvilignes des points A et B (figure ci-dessous)
On dit que le réel $\beta - \alpha$ est une mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$. On écrit : $\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \beta - \alpha \quad [2\pi]$

• Il existe une et une seule mesure de l'angle $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$ appartenant à l'intervalle $]-\pi, \pi]$. On l'appelle mesure principale de $(\widehat{\vec{u},\vec{v}})$

• Egalité : $\hat{\alpha} = \hat{\beta} \iff \alpha = \beta \quad [2\pi]$ α et β étant respect^t des mesures de $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$

• Relation de Chasles : q.q. soient les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (non nuls).
$\text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = \text{mes}(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + \text{mes}(\widehat{\vec{v},\vec{w}}) \quad [2\pi]$



• L'angle de mesure 0 est appelé angle nul. On le note $\hat{0}$
L'angle de mesure π est appelé angle plat. On le note $\hat{\pi}$
On a : $(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \hat{0}$ si et seul^t si $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k > 0$
$(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \hat{\pi}$ - - - - - - $\vec{v} = k\vec{u}$ avec $k < 0$

II) Addition des angles

1) Définition

On appelle somme de deux angles de mesures respectives a et b est l'angle dont une mesure est a+b – La somme de deux angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ se note $\hat{\alpha}+\hat{\beta}$

2) Propriétés

Les propriétés de l'addition des angles sont analogues à celles de l'addition des nombres réels, à savoir :

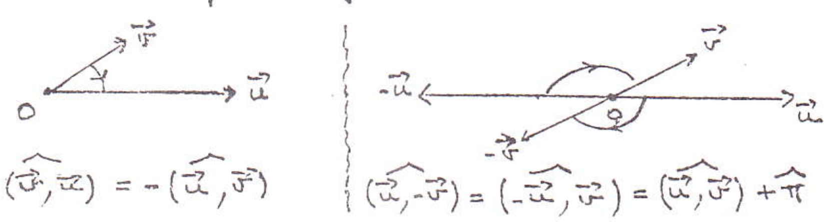
- L'addition des angles est commutative et associative
- Son élément neutre est l'angle nul – Pour tout angle $\hat{\alpha}$, $\hat{\alpha}+\hat{0} = \hat{0}+\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$
- Tout angle admet un opposé – Rappelons que deux angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$ sont opposés lorsque leur somme est l'angle nul – Leurs mesures α et β sont alors telles que $\alpha+\beta = 0 \; [2\pi]$ c'est à dire telles que $\beta = -\alpha \; [2\pi]$

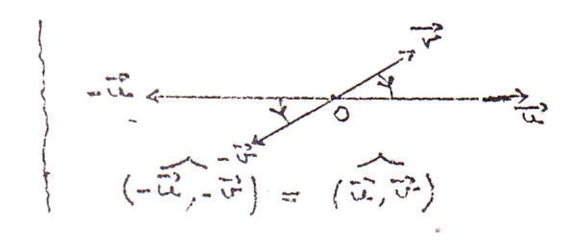
Par exemple, les angles de mesures $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}$ sont opposés –

3) Relation de Chasles

L'addition des angles vérifie la relation de Chasles : $(\widehat{\vec{u},\vec{w}}) = (\widehat{\vec{u},\vec{v}}) + (\widehat{\vec{v},\vec{w}})$

Il en découle que : (à retenir)





III) Double et moitiés d'un angle

1) Double d'un angle –

- On appelle double de l'angle $\hat{\alpha}$ l'angle $\hat{\alpha}+\hat{\alpha}$
- quels que soient les angles $\hat{\alpha}$ et $\hat{\beta}$:

$$2\hat{\alpha} = \hat{0} \iff \hat{\alpha} = \hat{0} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\pi}$$
$$2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} \iff \hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\beta}+\hat{\pi}$$

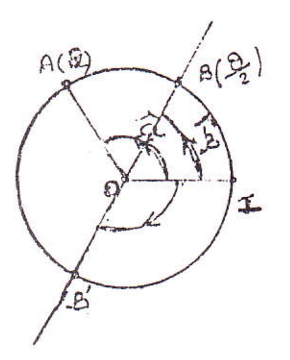
(à vérifier)

- les doubles d'angles vérifient la relation de Chasles –

2) Les deux moitiés d'un angle

- Dans l'ensemble des angles, l'équation $2\hat{\alpha} = \hat{a}$ ($\hat{a}$ donné, $\hat{\alpha}$ inconnu) admet deux solutions qui diffèrent de $\hat{\pi}$ – Les deux solutions de cette équation sont appelées les deux moitiés de l'angle $\hat{a}$

En effet, désignons par θ la mesure principale de l'angle $\hat{a}$ et considérons l'angle $\hat{\beta}$ de mesure principale $\frac{\theta}{2}$ –

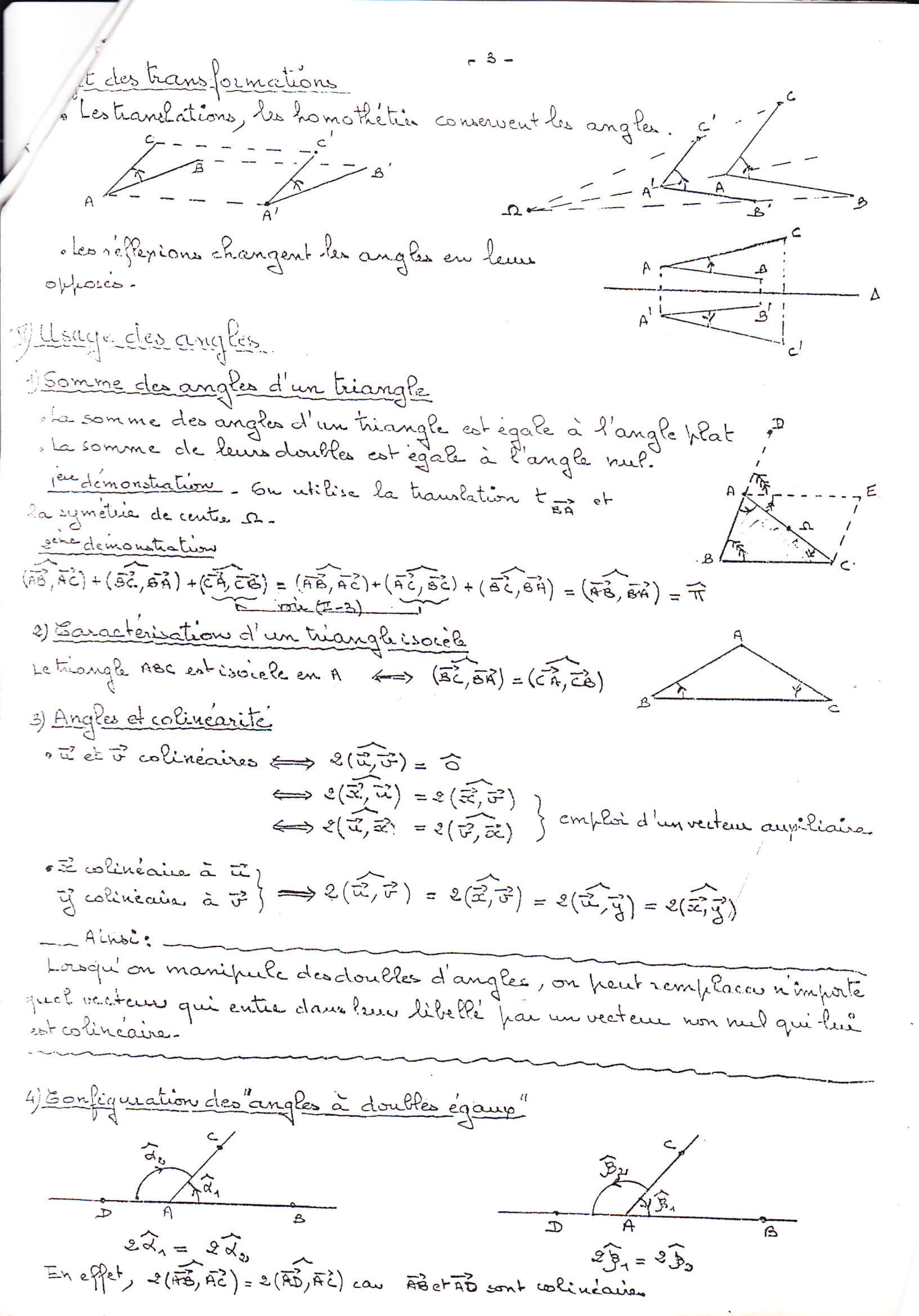


On a alors : $2\hat{\alpha} = \hat{a} \iff 2\hat{\alpha} = 2\hat{\beta}$

$$\iff \hat{\alpha} = \hat{\beta} \text{ ou } \hat{\alpha} = \hat{\beta}+\hat{\pi}$$

- Tout angle a deux moitiés – Par exemple
  - L'angle nul a deux moitiés, à savoir $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$ –
  - L'angle plat a deux moitiés dont les mesures principales sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

On les appelle respectivement " angle droit direct " et " angle droit indirect " – Ces deux angles droits sont opposés.



...t des transformations

• Les translations, les homothéties conservent les angles.

• Les réflexions changent les angles en leurs opposés.

IV) Usage des angles

1) Somme des angles d'un triangle

• La somme des angles d'un triangle est égale à l'angle plat

• La somme de leurs doubles est égale à l'angle nul.

1ère démonstration. On utilise la translation $t_{\vec{BA}}$ et la symétrie de centre Ω.

2ème démonstration

$$(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) + (\widehat{\vec{BC},\vec{BA}}) + (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = (\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) + (\widehat{\vec{AC},\vec{BC}}) + (\widehat{\vec{BC},\vec{BA}}) = (\widehat{\vec{AB},\vec{BA}}) = \hat{\pi}$$

(voir (II-3))

2) Caractérisation d'un triangle isocèle

Le triangle ABC est isocèle en A $\iff (\widehat{\vec{BC},\vec{BA}}) = (\widehat{\vec{CA},\vec{CB}})$

3) Angles et colinéarité

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\iff 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \hat{0}$

$\iff 2(\widehat{\vec{x},\vec{u}}) = 2(\widehat{\vec{x},\vec{v}})$

$\iff 2(\widehat{\vec{u},\vec{x}}) = 2(\widehat{\vec{v},\vec{x}})$ } emploi d'un vecteur auxiliaire.

• $\vec{x}$ colinéaire à $\vec{u}$, $\vec{y}$ colinéaire à $\vec{v}$ } $\Longrightarrow 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{x},\vec{v}}) = 2(\widehat{\vec{u},\vec{y}}) = 2(\widehat{\vec{x},\vec{y}})$

Ainsi :

Lorsqu'on manipule des doubles d'angles, on peut remplacer n'importe quel vecteur qui entre dans leur libellé par un vecteur non nul qui lui est colinéaire.

4) Configuration des "angles à doubles égaux"

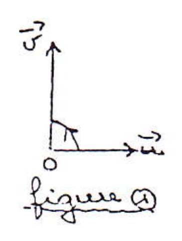
$2\hat{\alpha}_1 = 2\hat{\alpha}_2$

$2\hat{\beta}_1 = 2\hat{\beta}_2$

En effet, $2(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = 2(\widehat{\vec{AD},\vec{AC}})$ car $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$ sont colinéaires.

5) Angles et orthogonalité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\iff 2(\widehat{\vec{u},\vec{v}}) = \widehat{\pi}$



$\vec{j}$ O $\vec{i}$ figure (2)

6) Caractérisation du triangle rectangle

Le triangle ABC est rectangle en A $\iff 2(\widehat{\vec{AB},\vec{AC}}) = \widehat{\pi}$

$\iff 2(\widehat{\vec{BC},\vec{BA}}) + 2(\widehat{\vec{CA},\vec{CB}}) = \widehat{\pi}$

7) Caractérisation de la bissectrice de deux demi-droites de même origine

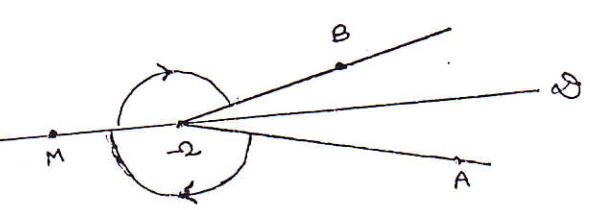
Les données.

$\mathcal{D}$ est la bissectrice des demi-droites $[\Omega A)$ et $[\Omega B)$

Le résultat

$M \in \mathcal{D} \setminus \{\Omega\} \iff (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{\Omega M},\vec{\Omega B}})$

$\iff 2(\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{\Omega A},\vec{\Omega B}})$



8) Caractérisation des bissectrices de deux droites sécantes

Les données

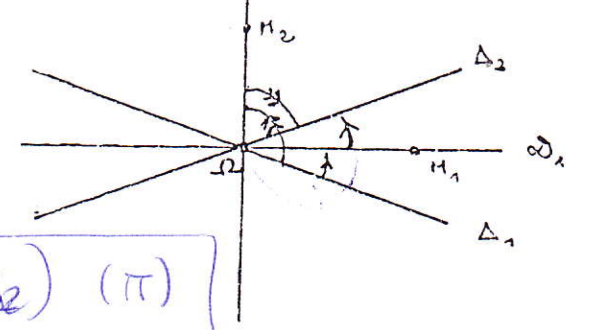
$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les bissectrices des droites Δ_1 et Δ_2

$\vec{A}_1$, $\vec{A}_2$ sont des vecteurs directeurs de Δ_1 et Δ_2

Le résultat

$M \in \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2 \setminus \{\Omega\} \iff 2(\widehat{\vec{A}_1,\vec{\Omega M}}) = 2(\widehat{\vec{\Omega M},\vec{A}_2})$

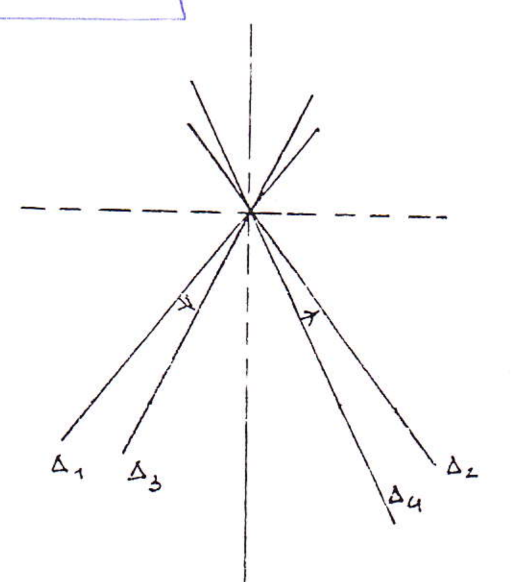
$2(\vec{\Delta_1},\vec{\Omega M}) = (\vec{A_1},\vec{A_2}) \quad (\pi)$



Application : Paires de droites isogonales

Etant donné quatre droites concourantes Δ_1, Δ_2, Δ_3 et Δ_4, on dit que $\{\Delta_1, \Delta_2\}$ et $\{\Delta_3, \Delta_4\}$ sont des paires de droites isogonales lorsque Δ_1 et Δ_2 d'une part, Δ_3 et Δ_4 d'autre part ont les mêmes bissectrices.

On dit aussi que, par exemple, Δ_4 est l'isogonale de Δ_3 par rapport à Δ_1 et Δ_2



Le résultat :

$\{\Delta_1, \Delta_2\}$ et $\{\Delta_3, \Delta_4\}$ sont isogonales si et seulement si $2(\widehat{\vec{A}_1,\vec{A}_3}) = 2(\widehat{\vec{A}_4,\vec{A}_2})$

$\vec{A}_i$ étant un vecteur directeur de la droite Δ_i --- $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

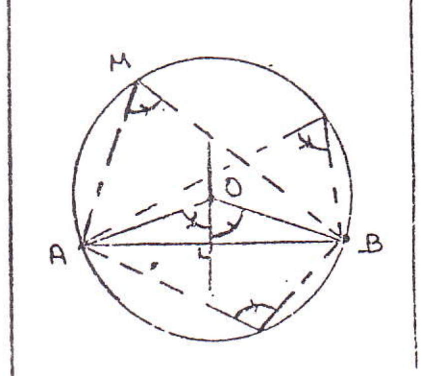
1) Angles et cercles

Les données

Les points O, A, B ; le cercle $\mathscr{C}$.

Le résultat

$M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\} \iff 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

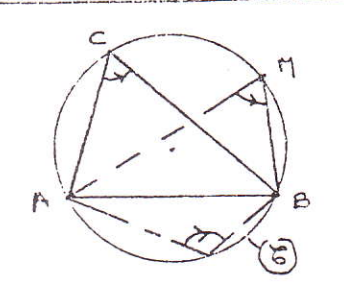


Les données :

Les points A, B, C ; le cercle $\mathscr{C}$.

Le résultat :

$M \in \mathscr{C} \setminus \{A, B\} \iff 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}})$

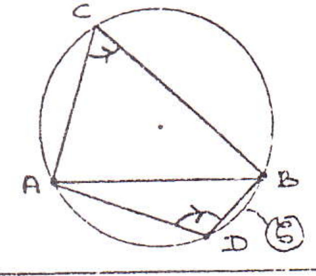


Les données :

le quadrilatère ABCD

Le résultat :

A, B, C, D cocycliques $\iff \begin{cases} 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}}) \\ C \notin (AB) \text{ ou } D \notin (AB) \end{cases}$

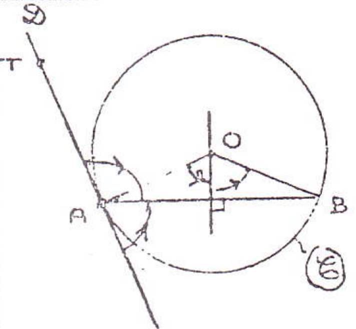


Les données :

Les points O, A, B ; le cercle $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ en A à $\mathscr{C}$

Le résultat

$T \in \mathscr{D} \setminus \{A\} \iff 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}})$

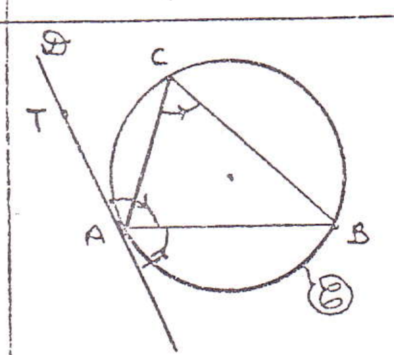


Les données :

Les points A, B, C ; le cercle $\mathscr{C}$, la tangente $\mathscr{D}$ en A à $\mathscr{C}$

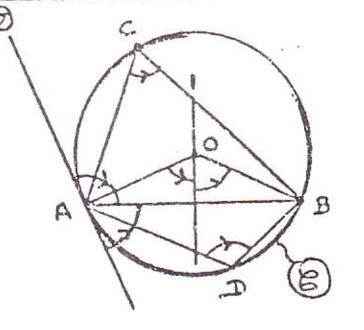
Le résultat :

$T \in \mathscr{D} \setminus \{A\} \iff \begin{cases} 2(\widehat{\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}}) = 2(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}) \\ C \notin (AB) \end{cases}$



Configuration des "angles à doubles égaux"

Tous les angles représentés dans la figure ci-contre ont des doubles égaux



VI) Ligne de niveau $(A,B)_{\hat{\alpha}}$

1) Définition

Etant donné deux points A et B du plan $\mathcal{P}$ et un angle $\hat{\alpha}$, on appelle ligne de niveau $\hat{\alpha}$ pour le bipoint (A,B) l'ensemble, noté $(A,B)_{\hat{\alpha}}$, des points M de $\mathcal{P} \setminus \{A,B\}$ tels que $(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = \hat{\alpha}$

En particulier, on peut vérifier que

- $(A,B)_{\hat{0}} = (AB) \setminus [A,B]$
- $(A,B)_{\hat{\pi}} =]A,B[$

2) Détermination de $(A,B)_{\hat{\alpha}}$ pour $\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$

On sait que les angles représentés dans la figure ci-contre ont tous des doubles égaux.

En posant $(\widehat{\vec{AT},\vec{AB}}) = \hat{\alpha}$, pour tout point M de $\mathscr{C} \setminus \{A,B\}$, on a : $2(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = 2\hat{\alpha}$

c'est à dire

$(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = \hat{\alpha}$ ou $(\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = \hat{\alpha} + \hat{\pi}$

demi-plan $\mathcal{P}_1$ — M_1, M_2, M_3 — $\mathscr{C}$ — frontière — A — B — M_4 — M_5 — demi-plan $\mathcal{P}_2$ — T

Au vu de la figure, on peut conjecturer que

$\begin{cases} (\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = \hat{\alpha} & \text{pour tout point de l'arc } \mathscr{C} \cap \mathcal{P}_1 \\ (\widehat{\vec{MA},\vec{MB}}) = \hat{\alpha} + \hat{\pi} & \text{pour tout point M de l'arc } \mathscr{C} \cap \mathcal{P}_2 \end{cases}$

Nous admettrons ce résultat - On retiendra le théorème suivant -

Etant donné deux points distincts A et B du plan $\mathcal{P}$ et un angle $\hat{\alpha}$ autre que $\hat{0}$ et $\hat{\pi}$, la ligne de niveau $(A,B)_{\hat{\alpha}}$ est l'arc $\mathscr{C} \cap \mathcal{P}_1$

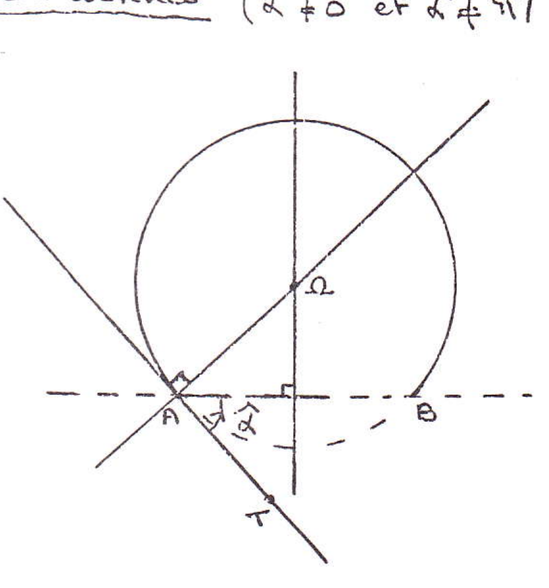
où
- $\mathscr{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT) définie par $(\widehat{\vec{AT},\vec{AB}}) = \hat{\alpha}$
- $\mathcal{P}_1$ est le demi-plan ouvert de frontière (AB) dont T n'est pas élément.

Remarque. L'arc $\mathscr{C} \cap \mathcal{P}_2$ est la ligne de niveau $(A,B)_{\hat{\alpha}+\hat{\pi}}$

Construction de $(A,B)_{\hat{\alpha}}$ lorsque A, B et $\hat{\alpha}$ sont donnés ($\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$)

On trace :

- la droite (AT) définie par $(\widehat{\vec{AT},\vec{AB}}) = \hat{\alpha}$
- la médiatrice de [A,B] et l'orthogonale en A à la droite (AT) ...... ces deux droites se coupent en un point Ω car $\hat{\alpha} \neq \hat{0}$ et $\hat{\alpha} \neq \hat{\pi}$



La ligne de niveau $(A,B)_{\hat{\alpha}}$ est alors l'arc du cercle de centre Ω passant par A qui est contenu dans le demi-plan ouvert de frontière (AB) dont T n'est pas élément.

II) Caractérisation d'un arc de cercle, d'un cercle en termes de mesures d'angle

soit α un réel, $\hat{\alpha}$ l'angle dont une mesure est α, A et B deux points distincts

1) Ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad [2\pi]$

Nous avons :

$mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad [2\pi] \iff (\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \hat{\alpha}$

Par suite, l'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad [2\pi]$ est l'arc $(A, B)_{\hat{\alpha}}$ que l'on note aussi $(A, B)_{\alpha}$

A
B
α
T

2) Ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad [\pi]$

Nous avons :

$$mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad [\pi] \iff mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\iff 2\,mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2\alpha + 2k\pi \quad \text{"}$$

$$\iff 2(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = 2\hat{\alpha}$$

Par suite, l'ensemble des points M tels que $mes(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}) = \alpha \quad [\pi]$ est $\mathcal{C} \setminus \{A, B\}$ où $\mathcal{C}$ est le cercle passant par A et B et tangent à la droite (AT) définie par $mes(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha \quad [2\pi]$

A
B
α
T